Henri Poincaré (1854-1912)

PUNTS DE VISTA SOBRE EL PROBLEMA DE POINCARÉ*

per

José María Montesinos-Amilibia

> *Más has dicho, Sancho, de lo que sabes –dijo Don Quijote–; que hay algunos que se cansan en saber y averiguar cosas, que después de sabidas y averiguadas, no importan un ardite al entendimiento ni a la memoria.*
>
> *(Don Quijote de la Mancha, cap. 22)*

El problema o conjectura de Poincaré pertany a la part de les Matemàtiques anomenada Topologia. Plantejat el 1904 per l'eminent matemàtic Henri Poincaré, ha estat objecte de l'atenció de molts matemàtics, i encara avui no se'n coneix la solució.

El problema de Poincaré se situa a la base de l'estudi de les varietats tridimensionals i, en certa manera, també de les de dimensió quatre. Parlant relativament, el seu enunciat és tan senzill com el del problema dels quatre colors, però la seva solució, si existeix (nota 1), almenys és tan difícil com la d'aquell problema.

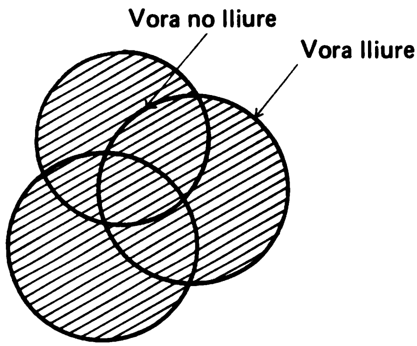
El problema consisteix a demostrar la veracitat de certa caracterització de l'esfera tridimensional, enunciada en termes geomètrics, que involucren les corbes tancades contingudes a l'esfera. Tant la solució positiva com la negativa serien d'un gran interès per a la comprensió del món de les varietats, si bé personalment em faria més feliç una resposta negativa. Evidentment, una demostració de la seva indecidibilitat seria certament enervant.

Henri Poincaré, el pare d'una nova era de la Topologia (i potser de la Ciència), nasqué a Nancy el 1854 i morí a París el 1912. D'ençà de petit sobresortí per la seva extraordinària memòria i intel·ligència i també pel seu caràcter afable i alegre [D]. El seu geni científic és distingí en un camp molt ampli de la ciència [HA]. Sobre la seva relació amb la Topologia diu Darboux (loc. cit.):

"Dedicà com a mínim sis memòries a allò que ell anomenava *Analysis*

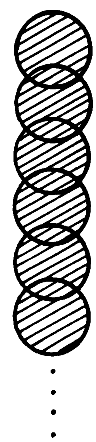
* L'autor, que no és especialista en història, ha decidit incloure aspectes històrics i matemàtics sobre el Problema de Poincaré, dedicant les notes als detalls específics que no seria convenient incloure al text de la conferència.

situs o *Geometria de la posició.* Aquesta difícil branca de la ciència matemàtica estudia les relacions que subsisteixen en una figura quan hom la deforma sense trencar-la ni duplicar-la. És ben conegut l'ús que de l'*Analysis situs* ha fet Riemann en els seus treballs sobre les funcions algèbriques. Poincaré s'hi veié conduït en els seus estudis sobre la integració qualitativa d'equacions diferencials i m'atreveixo a dir que li tingué un afecte particular, i que aquesta representà un paper important en els seus estudis filosòfics, així com en molts dels seus treballs matemàtics."



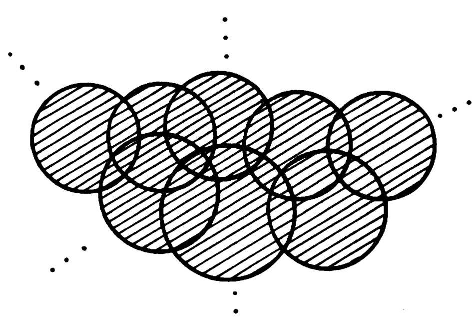
Tres pedaços fronterers
(varietat compacta amb vora)

a)



b)

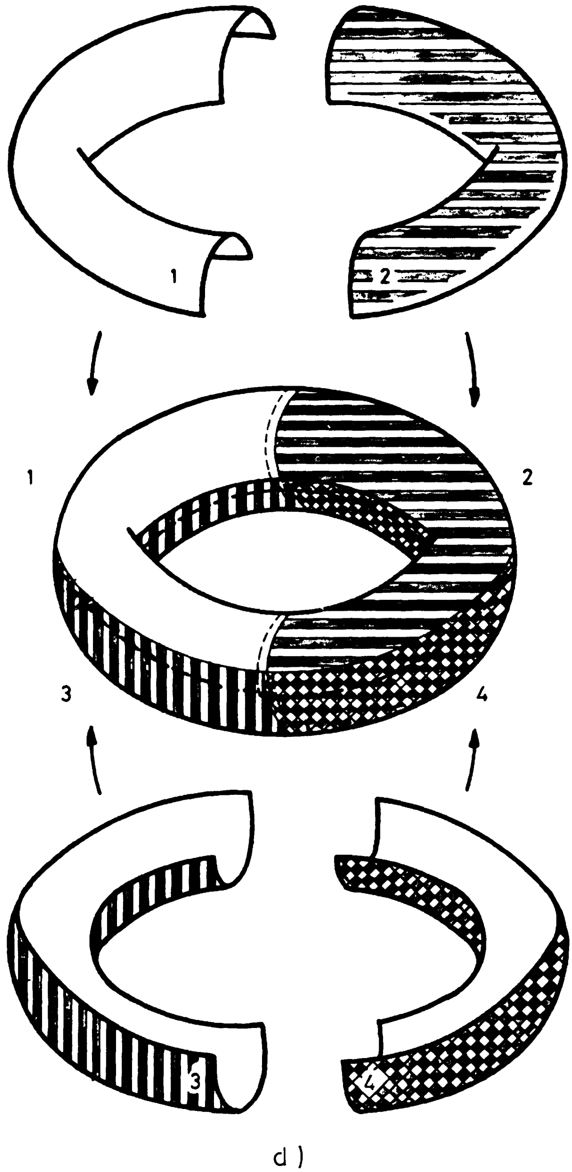
Infinits pedaços fronterers
(varietat no compacta amb vora)



c)

Infinits pedaços interiors
(varietat no compacta i sense vora= oberta)

Figura 1



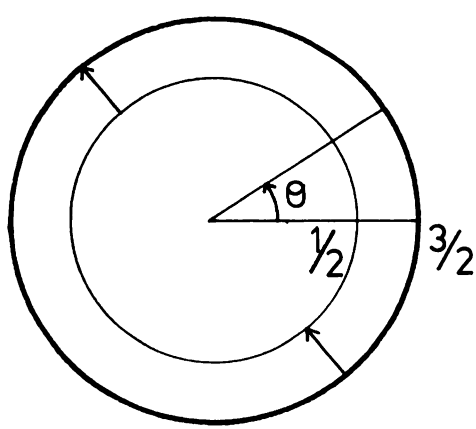
Quatre pedaços interiors
(varietat compacta sense vora=
tancada)

Figura 1

Fou en una d'aquestes memòries citades per Darboux on Poincaré enuncià la famosa conjectura, objecte d'aquesta conferència.

Per a la comprensió de l'enunciat del problema de Poincaré cal entendre el concepte de n-varietat o varietat de dimensió n (nota 2). Sense entrar en una definició precisa, el lector pot imaginar que disposa d'un nombre (finit o infinit) de pedaços de goma que enganxa entre si encavalcant-los. I això ho fa de totes les maneres idealment possibles (no només les que es poden realitzar al món en què vivim). D'aquesta manera construeix, "en abstracte" (sense relació a l'espai ambiental), una superfície o varietat bidimensional. Si s'ha fet servir un nombre finit de pedaços, la varietat és *compacta.* Si la vora d'un pedaç descansa totalment dintre una unió d'altres pedaços, el pedaç en qüestió s'anomenarà "interior". Altrament, algun tros de la seva vora és "lliure" i el pedaç s'anomenarà "fronterer". La varietat és *sense vora* si tots els seus pedaços són interiors. En cas contrari es dirà que és *amb vora* i la *vora* és la reunió de totes les vores lliures dels pedaços fronterers.

Com que els pedaços s'enganxen "en abstracte" no sempre es pot "veure" la varietat:



$re^{i\theta}$ s'enganxa amb $(2-r)e^{i(\theta+\pi)}, \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{3}{2}$.

Pla projectiu, que no pot ésser encabit en $\mathbb{R}^3$.

Figura 2

Si en lloc d'usar pedaços bidimensionals es fessin servir "boles de goma" (pedaços tridimensionals) s'obtindria una varietat tridimensional o 3-varietat. En aquesta dimensió la visualització es fa més difícil i cal recórrer a artificis anàlegs al de la figura 2. Si, per exemple, en una bola tridimensional o 3-bola no fem distinció entre un punt de la frontera i el seu antípoda, obtenim una 3-varietat que pot ésser recoberta amb 3-boles, igual que a la figura 2. La varietat resultant és l'espai projectiu de dimensió 3.

Un altre exemple, molt important per a tot el que segueix, és la varietat S^3 anomenada 3-esfera, degut al fet que generalitza la superfície esfèrica. Definim S^3 com els punts que són a una distància 1 de l'origen de coordenades de l'espai euclidià de dimensió quatre. Fent servir la projecció estereogràfica des del punt (0,0,0,1) sobre l'hiperplà equatorial (x,y,z), obtenim una imatge de S^3 més propera a la intuïció, a saber, l'espai euclidià de dimensió 3, $\mathbb{R}^3$, compactat amb un punt ideal o de l'infinit. Escriurem $S^3 = \mathbb{R}^3 + \infty$ (figura 3).*

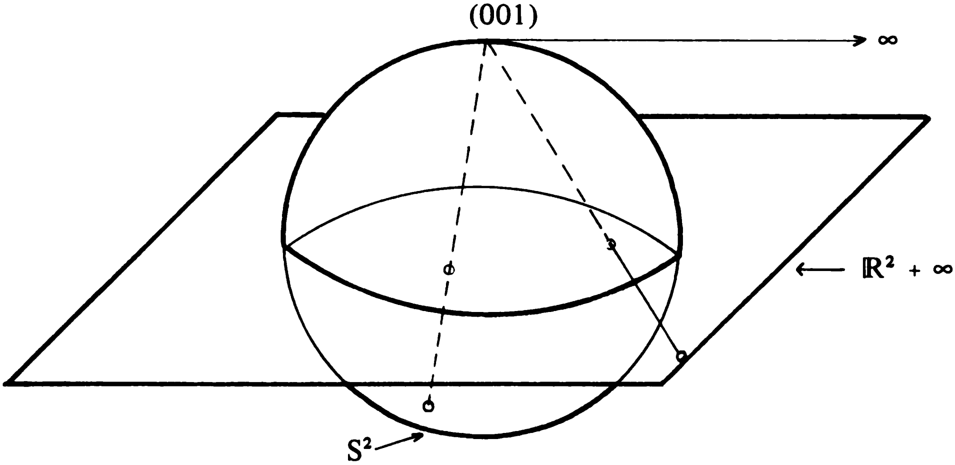


Figura 3

També podem imaginar varietats de dimensió n arbitràriament alta (n-varietat). Esmentarem quelcom d'això al final de l'article.

Encara cal introduir un altre concepte per a comprendre l'enunciat del problema de Poincaré. És el concepte de *llaç contràctil.* Un llaç a la 3-varietat tancada V^3 és una funció contínua $f : S^1 \to V^3$, on S^1 representa la

* El signe = significa igualtat mitjançant homeomorfisme.

circumferència. Un llaç f és *contràctil* si f pot ésser estès a un disc la vora del qual és S^1. Amb altres paraules, un llaç és una corba tancada de V^3, i és contràctil si pot fer-se més i més petit (dintre de V) fins a reduir-se a un punt. Pot veure's (nota 3) que tot llaç de S^3 és contràctil.

Ara la *conjectura de Poincaré* s'enuncia així: *"L'única 3-varietat tancada en la qual tot llaç és contràctil és la 3-esfera S^3".*

Inicialment, Poincaré enuncià que una 3-varietat tancada en què tot llaç és una vora ha d'ésser S^3 (nota 4). Però quatre anys després demostrà la falsedat d'aquesta afirmació mitjançant el famós exemple conegut avui amb el nom *d'esfera de Poincaré,* P^3 (nota 5). Aquest exemple aparegué a la memòria [P_2], al final de la qual Poincaré plantejà el seu famós problema amb les següents paraules:

"Restaria per estudiar una pregunta: és possible que el grup fonamental de V es redueixi a la substitució idèntica, sense que V sigui simplement connexa?".*

L'enunciat d'aquesta pregunta no ens permet de conèixer la resposta sospitada per Poincaré. Ens hauríem de referir, per tant, a la pregunta anterior como el "Problema de Poincaré" i no com la "Conjectura de Poincaré" (com se sol fer). Aquest és el criteri que ens guià a l'hora d'escollir el títol d'aquesta conferència.

Pel que tenen de profètic, recollirem ara les paraules finals de la seva famosa memòria:

"Mais cette question nous entraînerait trop loin".

I ben lluny que ens ha dut!: 76 anys d'esforços ininterromputs no han desentrellat el misteri d'aquesta pregunta. És possible, però, que la solució en sigui pròxima, si fem cas dels espectaculars resultats que sobre la teoria de la 3-varietats està obtenint actualment W. Thurston.

Però, per què tant d'interès per a resoldre aquest problema? A més de les implicacions que la seva solució comportaria, crec que el problema de Poincaré constitueix una pedra de toc per a calibrar el nostre coneixement de les 3-varietats (nota 6). Miraré d'explicar-me. Suposem que hom ens demana de trobar les relacions últimes o invariants que posseeix una 3-varietat i que la determinen, diguem, topològicament. Igual com féu Poincaré, començarem amb les propietats més òbvies i en cercarem d'altres, més profundes, a mesura que les propietats inicials es manifestin insuficients per a determinar la varietat. Hem fet esment del fet que la propietat que tot llaç sigui una vora no caracteritza la varietat. Si la propietat que tot llaç és contràctil caracteritzés la 3-esfera, podríem pensar que aquesta propietat dels llaços és la més profunda que podem esperar. Si, en canvi, existeix un contraexemple a la conjectura de Poincaré i som capaços d'exhibir-lo, és perquè hem trobat una propietat encara més profunda que la de la contrac-

* "Simplement connexa" en el llenguatge de Poincaré significa "homeomorfa a la 3-esfera" S^3.

tibilitat dels llaços. El meu desig que la "conjectura" resulti falsa s'explica per l'interès que em provoquen aquestes noves propietats de les 3-varietats que restarien per descobrir.

Aquests "invariants" de les 3-varietats s'estructuren a vegades de diverses maneres. Els llaços que no són vores formen els elements no trivials del *primer grup d'homologia,* $H_1(V; \mathbf{Z})$, de V. Els llaços no contràctils formen els elements no trivials del *grup fonamental,* $\pi_1(V)$, de V, introduït per Poincaré (vegeu la introducció de [P_2]). En aquest llenguatge $H_1(P^3; \mathbf{Z})$ és trivial i $\pi_1(P^3)$ és un grup de 120 elements, que és el grup binari de l'icosàedre (nota 7). El problema de Poincaré és *esbrinar si una 3-varietat amb* $\pi_1(V^3) = 1$ *és necessàriament* S^3. La relació entre $\pi_1(V)$ i $H_1(V; \mathbf{Z})$ és que aquest darrer grup és l'abelianitzat de $\pi_1(V)$.

El grup fonamental pot ésser definit per a qualsevol espai topològic i és un invariant *d'homotopia,* és a dir, és el mateix per a espais del mateix *tipus d'homotopia.* Dos espais X i Y són d'igual tipus d'homotopia si existeixen funcions contínues $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ tals que gf i fg són homòtopes a la identitat en X i Y respectivament (nota 8). Així $\mathbb{R}^3$ és del tipus d'homotopia d'un punt i un tor perforat és del tipus d'homotopia d'un vuit.

Si una 3-varietat V té $\pi_1(V) = 1$, pot veure's que és del tipus d'homotopia de S^3 (nota 9). Per tant, la "conjectura" de Poincaré s'enunciarà així: "tota esfera homotòpica és S^3". Veiem així que un invariant d'homotopia no podrà mai distingir una esfera homotòpica de S^3. És el que s'esdevé amb els invariants $\pi_1(V)$ i $H_1(V; \mathbf{Z})$.

La primera indicació del fet que podria ésser que el grup fonamental no fos suficient per a caracteritzar S^3 fou obtinguda per Alexander en demostrar l'existència de dues varietats lent del mateix tipus d'homotopia però topològicament diferents. Més tard Reidemeister i Whitehead obtingueren la classificació combinatorial i homotòpica de les lents, respectivament. Fou utilitzat, per a fer-ho, un nou invariant que naturalment no és un invariant d'homotopia. Però aquest invariant és zero per a totes les esferes homotòpiques (nota 10) i no pot pas ésser usat per a distingir S^3 d'una esfera homotòpica. Més recentment, Roklin (nota 11) descobrí un invariant (no d'homotopia) que és definit per a les varietats anomenades $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})$-esferes homotòpiques i en particular per a les esferes homotòpiques. Aquest invariant, conegut amb el nom d'invariant μ, permet de donar una altra demostració del teorema d'Alexander esmentat abans. L'invariant μ de S^3 és zero, però el de l'esfera de Poincaré P^3 no és zero.

En principi l'invariant μ pot servir per a distingir S^3 d'una esfera homotòpica donada i així ho creuen alguns matemàtics. Hom diu que els matemàtics americans Cappell i Shaneson estan fent un esforç considerable per a trobar una esfera homotòpica amb invariant μ diferent de zero. Nogensmenys pot molt ben ésser que l'invariant μ s'anul·li per a tota esfera homotòpica (nota 12), i aquesta és precisament la meva opinió.

Hom ha cercat contraexemples a la conjectura de Poincaré en connexió amb la teoria de nusos. Un nus es una corba simple i tancada en $S^3 = \mathbb{R}^3 + \infty$. Un *lligam* (anglès: *link*) és un sistema de nusos en S^3, dos a dos disjunts. Una operació de *cirurgia de Dehn* a un nus consisteix a tallar de S^3 un entorn tubular del nus i tornar-lo a cosir d'una altra manera. La cirurgia és *exòtica* si el meridià del tub que hem tret no torna a ocupar la posició inicial (Figura 4).

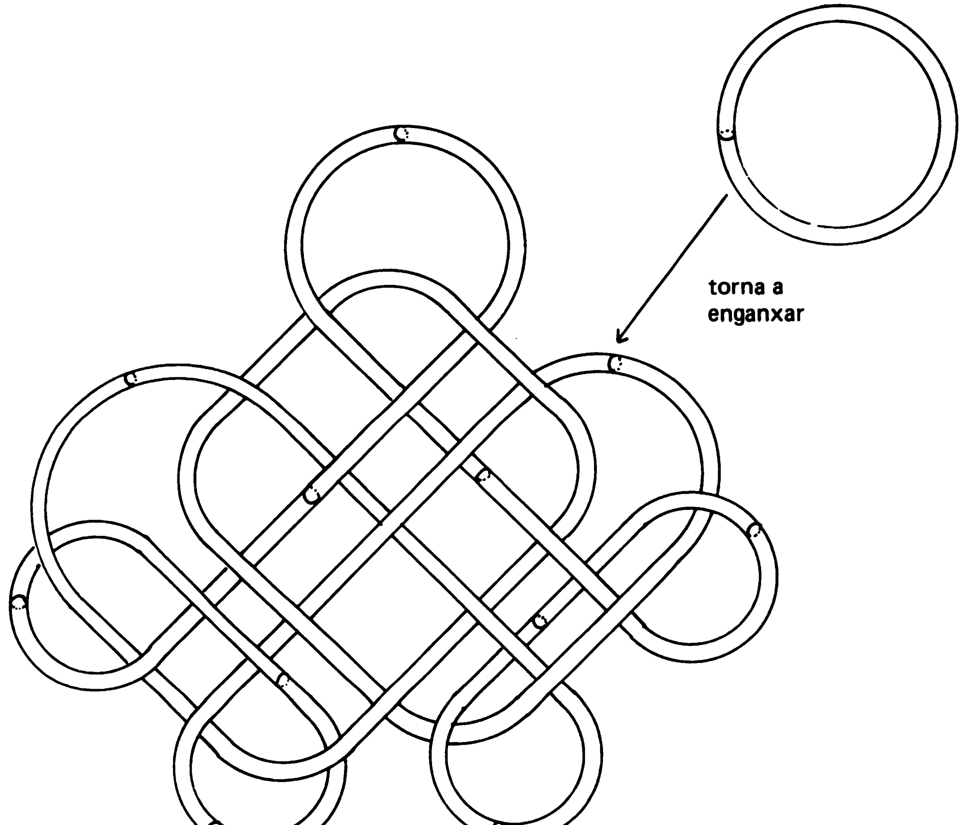


Figura 4

Fent aquesta operació de cirurgia, S^3 canvia, en principi, per a donar una altra 3-varietat. Lickorish i Wallace demostraren que així s'obté qualsevol 3-varietat sempre que permetem cirurgia simultània en les components d'un lligam.

La conjectura de Poincaré s'obtindria si hom pogués demostrar que tota varietat simplement connexa obtinguda per cirurgia exòtica en un lligam és S^3. Però pot passar que una cirurgia exòtica doni de nou S^3. Per exemple, això succeeix amb certes cirurgies del nus trivial i també amb certes cirurgies en lligams (nota 13). Aquest fet fa gairebé inviable una prova per aquest camí. És per això que hom ha utilitzat aquest mètode per a cercar contraexemples. No es coneix cap nus diferent del trivial que sigui *fèrtil,* és a dir, que produeixi una varietat simplement connexa per cirurgia exòtica. Si això realment és cert, disposem d'una prova de la conjectura de Poincaré per a la classe de varietats obtingudes per cirurgia en un nus. La prova general s'obtindria si hom pogués demostrar que aquesta classe conté totes les esferes homotòpiques. El peoner d'aquests estudis fou el matemàtic mexicà F. González-Acuña, el qual a la seva tesi doctoral (Princeton, 1969) demostrà l'esterilitat d'àmplies famílies de nusos. Observi's que si un nus resultés fèrtil no per això seria falsa la conjectura de Poincaré, perquè la cirurgia exòtica podria donar S^3. Però en aquest cas hom hauria demostrat la falsedat de la conjectura que un nus determina el seu complement. Això explica que sigui un camp d'investigació molt actiu.

Alexander demostrà que tota 3-varietat és un recobriment ramificat de S^3 i aquest fet també ha estat usat per a tractar de buscar contraexemples. Primerament, hi ha recobriments ramificats sobre un lligam de S^3 que són S^3. Això succeeix quan la ramificació és el nus trivial i també en altres casos no trivials (nota 14). Però si el recobriment és cíclic i la ramificació és no trivial, el recobriment no és mai simplement connex (conjectura de Smith). La recerca de contraexemples se sol limitar, doncs, a recobriments irregulars (vegeu [M]).

Com pot veure's som, fins ara, amb el partit dels que creuen que la conjectura és falsa i tracten de trobar-li un contraexemple. Suposem que per un procediment poc o molt tortuós hem anat a parar a una 3-varietat V que pensem que és un contraexemple. Diu Haken [H] que, aleshores, "hem de provar que V és simplement connexa ($\pi_1(V) = 1$) i que V no és la 3-esfera. Això és més aviat difícil perquè tant el *problema de la connexió simple* (o sigui, trobar un algorisme que decideixi si V és o no simplement connexa) com el *problema del reconeixement de S^3* (o sigui, trobar un algorisme que decideixi si V és o no S^3) són problemes encara oberts". Les consideracions fetes més amunt poden interpretar-se com la nostra ignorància de si l'invariant μ resol el problema del reconeixement de S^3, si bé la meva opinió personal és un "no" dràstic.

Existeix un altre intent de resoldre el problema de reconèixer S^3 que podria aplicar-se quan disposem d'un diagrama de Heegaard de la 3-varietat, cosa que a la pràctica no és difícil d'aconseguir [H; p. 149]. Aquest intent és l'objecte d'una activa investigació avui, perquè ha proporcionat resultats positius per a les varietats de gènere 2.*

* Per a aquestes varietats la conjectura de Poincaré és certa i així aquest resultat no és realment molt important.

Hi ha d'altres procediments més sofisticats per a assajar de demostrar que la conjectura de Poincaré és falsa, sense exhibir un contraexemple. Un d'ells, presentat per Haken [H], consistiria a veure que, per exemple, el problema del reconeixement de S^3 és resoluble i que, en canvi, el de la simple connexió és insoluble. Aleshores, la conjectura de Poincaré ha d'ésser falsa perquè si no ho fos, ambdós problemes serien equivalents, i això és contradictori.

L'altre procediment, que fou assajat per S. Armentront, consisteix a provar *l'existència* d'un contraexemple, sense tractar d'exhibir-lo.

On la llista de fracassos ha estat més llarga és en el partit dels que assajaren de demostrar la conjectura de Poincaré. Certament tingueren d'incentiu per a llur malaguanyada empresa el fet que la conjectura de Poincaré resultés correcta un cop generalitzada a dimensions superiors a quatre.

La n-conjectura de Poincaré és que *l'única n-esfera homotòpica és la n-esfera S^n*. Per a $n = 3$ aquesta és la conjectura clàssica de Poincaré, com hem dit abans. Doncs bé, Stallings, Zeemans, Smale i Wallace demostraren cap al 1961 que la n-conjectura de Poincaré és correcta si $n > 4$ (nota 15). No cal dir que els mètodes emprats fallen si $n = 3,4$.*

Crec que la primera prova falsa dela conjectura dePoincaré és la de J.H.C. Whitehead. Fou publicada el 1934, però aviat el propi Whitehead n'envià una correcció. Els seus esforços no foren, però, infructuosos, perquè provà la falsedat de l'anàleg de la conjectura de Poincaré per a 3-varietats obertes (nota 16).

D'ençà d'aleshores les proves falses han anat apareixent sense interrupció, la major part en forma no publicada. Tant és així que no crec que passi cap any sense que els editors de les millors revistes especialitzades rebin alguna d'aquestes falses proves amb la petició que sigui publicada.

Com hem vist, aquest anar i venir de falses demostracions no ha estat treball perdut. Ben al contrari, han permès de tenir un coneixement cada cop més precís del problema. Un cop d'ull per part del lector a l'article de Stallings titulat "Com *no* provar la conjectura de Poincaré" bastarà per a convèncer d'això que dic [SA].

Uns quants altres autors han fet (i fan) intents seriosos per a provar la conjectura. La llista, naturalment, no la conec. Cito Papakyriakopoulos, Haken, Thurston, Shalen, Homma, entre d'altres.

Papakyriakopoulos [P] enfocà el problema des del punt de vista dels diagrames de Heegaard. Els seus resultats són molt parcials. Advertim el lector que el teorema 35.5 de [P] és cert per a esferes homològiques i no només homotòpiques, i així les conjectures (1) i (2) de [P] no poden ésser ambdues correctes, altrament tota esfera *homològica* seria S^3.

Haken, un dels matemàtics que ha estudiat el problema més intensament, publicà [H] un magnífic resum sobre l'estat del problema el 1969.

* En el moment de corregir les proves d'aquesta obra, hom sap ja que la 4-conjetura de Poincaré (topològica) és certa (vegeu M. Freedman, J. Diff. Geometry (1982)).

Allí apareixen també els seus intents de demostració. El lector notarà que l'última secció de l'article no és correcta.*

Hom diu que Thurston i Shalen intenten una demostració en la línia de la recentment provada conjectura de Smith. No seria estrany que l'extraordinària potència geomètrica de Thurston assolís la demostració.

Homma tracta d'emprar un conegut resultat de Moise per a provar la conjectura. Haken em digué que aquest camí ja l'havia seguit ell, sense èxit.

Espero que les anteriors pinzellades sobre el problema de Poincaré serveixin més per a encoratjar algú a intentar-ne una demostració que no pas per a fer-los retrocedir enfront d'un problema que es presenta tan difícil.

* Comunicat per F. González-Acuña.

NOTES

1. Són lògicament possibles tres situacions:
   a) la conjectura és certa;
   b) la conjectura és falsa;
   c) la conjectura és indecidible.
   La demostració de b) implica demostrar que existeix un contraexemple.
2. El lector pot consultar les primeres pàgines del llibre de Glaser [G] per a una definició rigorosa de varietat. És obra de Moise [M] la demostració que tota 3-varietat és combinatorial i que dues 3-varietats homeomorfes són combinatorialment equivalents (Hauptvermutung). Per això el lector pot suposar, sense pèrdua de generalitat, que les 3-varietats en qüestió són combinatorials.
3. Sigui f: $S^1 \to S^3$ un llaç. Per teorema d'aproximació simplicial [ST] pot deformar-se f per una homotopia, de manera que la seva imatge no contingui ∞ en $S^3 = \mathbf{R}^3 + \infty$ La contracció de $\mathbf{R}^3$ donada per una família contínua d'homotècies de centre a l'origen arrossega, en contreure's, el llaç f.
4. Vegeu [P_1]. Hom diu que un llaç és vora quan és la vora d'una superfície orientable amb singularitats, continguda a la varietat. Un llaç contràctil és vora d'una superfície de gènere zero.
5. Poincaré descriví la seva varietat mitjançant el diagrama de Heegaard de gènere dos següent (figura 5):

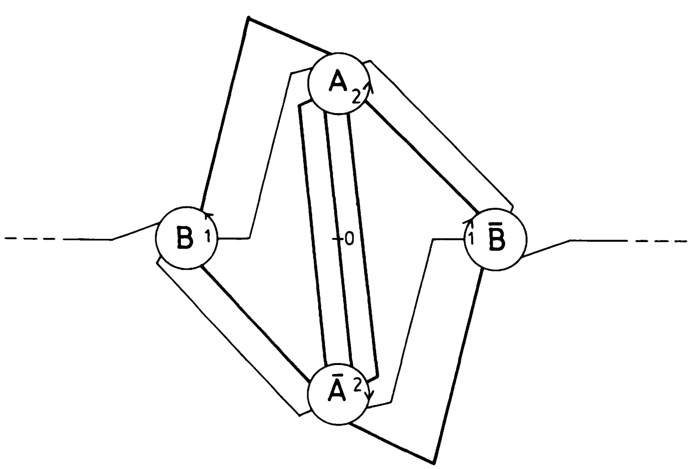


Figura 5

Aquest diagrama és simètric respecte a 0. Per tant, P^3 és recobriment doble ramificat del toroïdal $\{3,5\}$ (compareu amb [WS]). Per tant P^3 també és recobriment cíclic triple ramificat sobre el toroïdal $\{2,5\}$ i quíntuple sobre el toroidal $\{2,3\}$ [S].
Com que el $\{2,3\}$ és fibrat de monodromia periòdica de període 6, resulta que el recobriment quíntuple no ramificat del trèbol és topològicament equivalent a l'exterior del trèbol amb orientació oposada (car les seves monodromies són inverses).El recobriment ramificat s'obté per cirurgia en el trèbol. Així P^3 és una de les varietats descobertes per Dehn, posteriorment.
Usant un recurs de Hempel (figura 6):

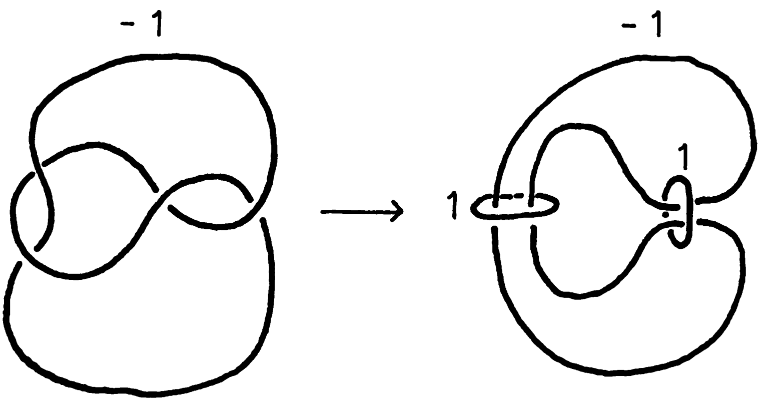
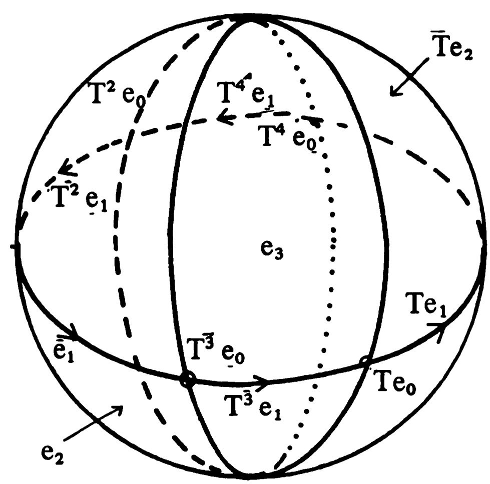


Figura 6

hom veu que la varietat P^3 s'obté també per cirurgia en els anells de Borromeo.
P^3, com a recobriment doble de $\{3,5\}$, és la varietat de Seifert (ooo|−1, (2,1), (3,1), (5,1)) fibrada amb fibra S^1 i 3 fibres excepcionals (vegeu [S]).

6. Recordant una frase de Bing [B], diria que no coneixerem exactament què són les 3-varietats fins que no sapiguem què és S^3. Si la conjectura resulta certa, restarà clar que, essencialment, hom no pot esperar de les 3-varietats res més del que ja és sabut (vegeu a [B] algunes de les implicacions conegudes). Si, per contra, resultés falsa, seria perquè encara hi ha un corrent subterrani de coneixement que ignorem completament.
7. El lector en pot veure a [MY] els detalls. El grup binari de l'icosàedre (vegeu [W]) és una extensió central del grup de dos elements pel grup de rotació de l'icosàedre (isomorf de l'alternat A_5). El grup binari de l'icosàedre té, doncs, 120 elements i és un grup perfecte.
S'esdevé que les 60 rotacions que fixen l'icosàedre formen un subgrup A_5 de SO(3) $\cong \mathbb{R}P^3$. El dodecàedre és un domini fonamental per a l'acció de A_5 a SO(3). Així $\mathbb{R}P^3$ admet una descomposició en 60 dodecàedres que s'aixeca a una de 120 dodecàedres de S^3, recobriment doble de $\mathbb{R}P^3$. El grup A_5 s'aixeca al binari de l'icosàedre, estenent l'aplicació antipodal de S^3, que commuta amb qualsevol element de SO(4).

8. $h:X \to X$ és homòtopa a la identitat si existeix $H:X\times I \to I$, contínua tal que $H(x,0) = h(x)$, $H(x,1) = x$, per tot $x \in X$, essent I l'interval [0,1].
9. Si $\pi_1 V = 1$, V és una esfera homològica. Pel teorema de Hurewicz, $\pi_2 V = 1$, $\pi_3 V \cong \mathbf{Z}$. Sigui $f:S^3 \to V$ un generador de $\pi_3 V$. Aleshores el 3-cicle $f(S^3)$ és homòleg al 3-cicle V, per l'isomorfisme de Hurewicz. Aleshores $f_*:H_3(S^3) \to H_3(V)$ és un isomorfisme. Aleshores, el teorema de Whitehead implica que f indueix isomorfisme a homotopia i per un altre teorema de Whitehead S^3 i V són del mateix tipus d'homotopia.
10. Vegeu [A]. Reidemeister [R] classificà combinatorialment les lents. Així $L(p,q)$ és igual a $L(p,q')$ si i només si o bé $q' \equiv \pm q$ o bé $qq' \equiv \pm 1$ (mòd. p). Aquesta classificació es topològica, pel resultat de Moise esmentat a la nota 2. La classificació fou duta a terme usant un invariant (no d'homotopia, tanmateix) anomenat ara torsió de *Reidemeister-Franz*. Hom considera el recobriment universal $\tilde{V}$ de V i hom pren un domini fonamental $V' \subset V$ per a l'acció del grup de transformacions del recobriment. Així $\pi_1 V$ és un grup discret que actua lliurement a $\tilde{V}$ i els complexos de cadenes $C_i(\tilde{V}; \mathbf{Z})$ són mòduls lliures sobre l'anell de grup $\mathbf{Z}(\pi,V)$ perquè les cel·les de V' poden ésser preses com a bases. Per exemple, sigui $V = L(p,q)$ i sigui $\pi_1 V = \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$, que actua a $S^3 = \tilde{V}$. Hom pren la descomposició cel·lular amb només les quatre cel·les següents:



L (5,2)

$$\partial e_1 = -e_0 + T^3 e_0$$
$$\partial e_3 = -e_2 + Te_2$$
$$\partial e_2 = e_1 + T^3 e_1 + Te_1 + T^4 e_1 + T^2 e_1$$

Figura 7

Tenim:

$$0 \to C_3(\tilde{V};\mathbb{Z}) \xrightarrow{T-1=\partial} C_2(\tilde{V};\mathbb{Z}) \xrightarrow{1+T+\ldots+T^{p-1}=\partial}$$

$$C_1(\tilde{V},\mathbb{Z}) \xrightarrow{T^r-1=\partial} C_0(\tilde{V};\mathbb{Z}) \to 0 \ , \ rq \equiv 1 \ (\text{mòd. } p).$$

D'aquí hom extreu la torsió sota certes condicions.
La torsió de Whitehead és un refinament d'aquest concepte. Com veiem, aquests invariants són interessants quan $\pi_1 V \neq 1$. En tot altre cas són zero i no serveixen per al problema de Poincaré.

11. Sigui H^3 una $\mathbb{Z}/2\ \mathbb{Z}$-esfera homològica. Aleshores H^3 és vora d'una 4-varietat W^4 tal que $H_1\ (W^4;\ \mathbb{Z})$ no té 2-torsió i la forma d'intersecció és parella. Si $\sigma(W^4)$ és la signatura d'aquesta forma (sobre el cos real), el μ-invariant és $-\sigma(W^4)/16$ reduït mòdul u. Tenim que $\mu(p^3) = 1/2$, $\mu(L(7,1)) = 5/8$, $\mu(L(7,2)) = 1/8$, per exemple.
12. Sigui Σ^3 una *bola homotòpica* (o sigui, una esfera homotòpica menys una 3-cel·la oberta). *La conjectura de Poincaré equival al fet que* Σ^3 x *[0,1] sigui una 4-bola,* car si això és així, $\Sigma^3 \subset \partial(\Sigma^3 \times [0,1]) = S^3$ i, per un teorema d'Alexander, Σ^3 ha d'ésser una 3-bola. És, doncs, molt probable que $\Sigma^3 \times [0,1]^2$ sigui una 5-bola. Si això fos així Σ^3 seria la pàgina d'un llibre obert definit a S^4, el llom del qual seria el 2-nus $\partial(\Sigma^3)$ que té complement del tipus d'homotopia de S^1. Si aquest 2-nus és trivial, cosa que resulta raonable, fent-li cirurgia hom obtindria $H^3 = \Sigma^3 \cup B^3 \subset S^1 \times S^3$. Passant al recobriment cíclic infinit de $S^1 \times S^3$ que és $\mathbb{R} \times S^3$, veiem que $H^3 \subset \mathbb{R} \times S^3$ i així H^3 resultaria h-covorejant a S^3. Per tant, H^3, com a vora d'una varietat contràctil, tindria μ-invariant zero.
13. La cirurgia al lligam de la figura 8 dóna altre cop S^3:

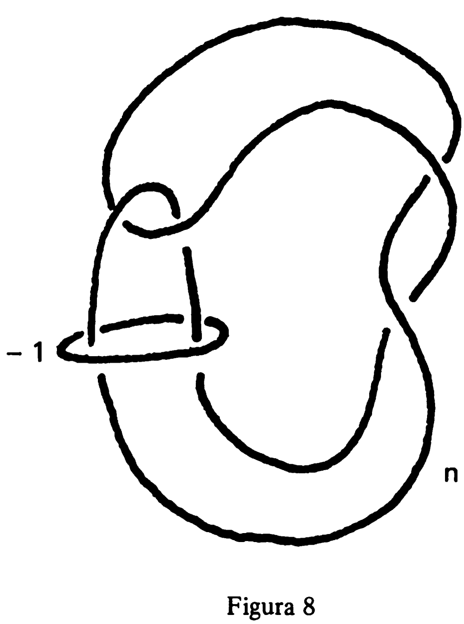


Figura 8

14. S^3 és un recobriment de S^3, regular de quatre fulls, ramificat sobre el lligam de la figura 9:

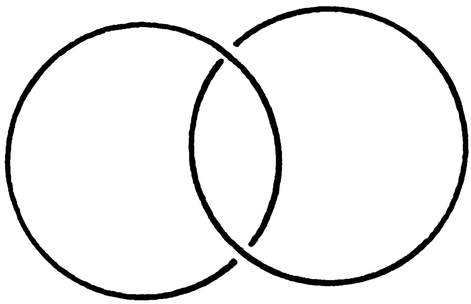


Figura 9

El cas més freqüent es dóna amb recobriments irregulars. Així S^3 és un recobriment de S^3, irregular de tres fulls, ramificat sobre el nus trèbol.

15. Tal com diu Milnor en els seus comentaris a l'obra de Whitehead, els treballs de Whitehead foren essencials per a obtenir aquest resultat.
16. Tal com diu Milnor (*loc. cit.*) l'amarga experiència que visqué Whitehead en publicar una demostració errònia de la conjectura de Poincaré marcà l'extremat rigor que posà en els seus altres treballs.
    Un any després d'haver presentat la seva correcció a la falsa demostració de la conjectura, Whitehead descobrí el seu famós exemple que demostra que la 3-bola oberta no pot ésser caracteritzada usant únicament recursos d'homotopia. Prengui's un tor massís T_1, encabit desnuat a S^3. Dintre de T_1, hom pren T_2 tal com ho indica la figura 10:

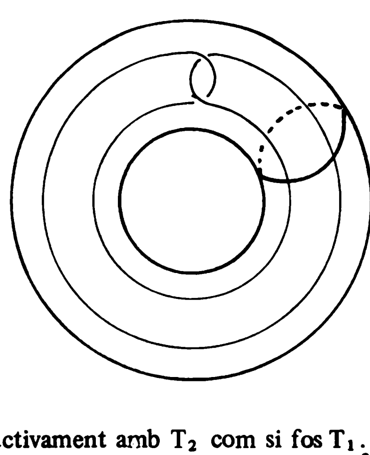


Figura 10

i hom procedeix inductivament amb T_2 com si fos T_1. Aleshores $S^3 - \cap T_i$ és una varietat oberta i contràctil, però no és homeomorfa a $\mathbf{R}^3$.

REFERÈNCIES

[D] G. Darboux: "Éloge historique d'Henri Poincaré" *Oeuvres de Henri Poincaré,* vol. II, Gauthiers-Villars, París, 1952.

[HA] J. Hadamard: "Poincaré i la teoria de les equacions diferencials", conferències recollides per E. Terrades i B. Bassegoda. *Col·lecció de Cursos de Física i Matemàtica.* Vol. III, Barcelona, s.d.

[G] L. C. Glaser: "Geometrical combinatorial Topology" Vol. I i II. Van Nostrand Reinhold *Math. Studies,* 27 (1970).

[M] E. E. Moise: "Affine structures in 3-manifolds" I a VIII *Annals of Math.* **54** a **59** (1951 a 1954).

[C] M. M. Cohen: "A course in simple homotopy theory" Springer GTM, 10 (1973).

[P_1] H. Poincaré: "Sécond complément à l'analysis situs". *Proc. London Math. Soc.* **32** (1900) 277-308.

[ST] H. Seifert i W. Threlfal: "Lecciones de Topología". CSIC (1951).

[P_2] H. Poincaré: "Cinquième complément à l'analysis situs". *Rendiconti Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), 45-110.

[B] R. H. Bing: "Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré Conjecture". *Lectures on Modern Math.*, Vol. II (1964), Wiley.

[MY] W. S. Massey: "Algebraic Topology: an introduction", Harcount, Brace and World Inc. (1967).

[W] J. A. Wolf: "Spaces of constant curvature" Publish or Perish (1977).

[WS] C. Weber and H. Seifert: "Die beiden Dodekaederräume". *Math. Z.* **37** (1933), 237-253.

[A] J. W. Alexander: "Note on two three-dimensional manifolds with the same group". *Trans. Amer. Math. Soc.* **20** (1919), 339-342.

[R] K. Reidemeister: "Homotopieringe und Linsenraüme" *Hamburger Abhandl.* **11**(1935), 102-109.

[H] W. Haken: "Various aspects of the three-dimensional Poincaré problem", dins Topology of manifolds. Cantrell and Edwards ed. Markham (1969).

[S] H. Seifert: "Topologie dreidimensionaler gefasserter Räume" *Acta Math.* **60** (1933), 147-238.

[MO] J. Montesinos: "Reducción de la conjetura de Poincaré a otras conjeturas geométricas" *Revista Mat. Hisp. Amer.* **32** (1972), 34-51.

[P] C. D. Papakyriakopoulos: "A reduction of the Poincaré conjecture to group-theoretic conjectures". *Amer. J. of Math.* **77** (1963) 250-305.

[SA] J. Stallings: "How not to prove the Poincaré conjecture". Topology seminar Wisconsin (1965) *Ann. Math. Studies* **60** (1966), 83-88.